数理解析研究所講究録
116巻 1971年 1-23

複素多様体の双有理型分類と楕円曲面の多種数の位相的性質

東京大学，理，飯高茂

§1. 序.

便宜上 M^n を複素 n 次元の compact 複素多様体とし以下常にこの意味で用いることにする.

20世紀初頭に代数曲面の双有理分類理論がイタリアの代数幾何学者 G. Castelnuovo と F. Enriques とによって粗削りながらも美しく完成して以来[1]それを凌駕する理論は約半世紀の間生れなかった. 数学史上の一偉観というべきである. 小平邦彦は50年代の終りから一般の M^2（最初は Kähler 曲面, Atiyah-Singer 理論が誕生してからは全く一般の M^2）を考察してその双正則分類と構造の理論をつくり[10] I, II, III, IV に美しく展開した. 又楕円曲面の精緻を極めた一般論[9] II, III 一般型代数曲面の標準モデルについての深い研究[11]（更に未発表の研究もある.）も古典をはるかに越えた深刻無比なものであった. M^3 の研究にはじめて取組んだのは河井壮一

[8] である．そこでの方法は基本的には小平の M^2 の研究に用いられたものであるが，3次元固有の議論，又 M^2 の理論を透明ならしめるものがあって興味深い．

本論文では，小平一河井 の方法を基礎にして M^n の理論が現状ではどの程度までできるかを解説する．なお著者の解説的論文「代数多様体の種数と分類」の §5 と重なる所もあるが併読されればよいこともあろう．

まず M^n の標準次元 $\kappa(M)$ (canonical dim. of M) を説明する．次に M^n の代数的次元 $a(M)$ を考え，基本定理(広中)に到る．そして最も中心である $a(M)=0$ なる Kähler 多様体の Albanese 写像の研究を行なう，最後に楕円曲面の基本群の表をかかげ，多種数との関連をのべる．

§2. M^n の標準次元 ([7] 参照).

M^n 上の因子 D (又は invertible sheaf) を一つ定めておく．$[D]$ で D からつくられた line bundle，$\mathcal{O}(D)$ でその section の芽の層，$l(D)=\dim H^0(M,\mathcal{O}(D))$ と記すことにする．

更に $\mathbf{N}(D)=\{m\in\mathbf{N};\ l(mD)>0\}$ とおく．$\mathbf{N}(D)\neq\emptyset$ のときそれは $\mathbf{N}$ の sub-semigroup をつくる．それ故 $\mathbf{N}(D)$ の元の g.c.d. を $m_0(D)$ とおくとき，$m\in\mathbf{N}(D)\Rightarrow m\equiv 0 \mod. m_0(D)$，又 $m\gg 0$，$\equiv 0 \mod. m_0(D)\Rightarrow m\in\mathbf{N}(D)$，となる．

又一般に $l(D)>0$ のとき，$H^0(M, \mathcal{O}(D))$ の底を $\psi_0, \ldots, \psi_N$ として，~~有理型~~写像 Φ_D

$$M \ni p \longmapsto \psi_0(p) : \psi_1(p) : \cdots : \psi_N(p) \in P^N$$

が定まる．

そこで一般の D に戻る。但し $N(D) \neq \phi$ とする．すると，

$$\kappa(D, M) = \max_{m \gg 0} \dim \Phi_{m m_0(D)}(M)$$

として，非負（$\leq n$）整数が定まるから，これを M の D 次元とよぶことにする．すると，以上の記号を用いて，

定理 1．　充分大なる整数 m に対して

$$\alpha m^{\kappa} \leq l(m\, m_0(D) D) \leq \beta m^{\kappa},$$

但し $\kappa = \kappa(D, M)$，α，β は m によらない常数．

が成立する．

定理 2．$\kappa(D, M) = \kappa > 0$ のとき，任意の正なる常数 p を一つ定める．すると充分大なる整数 m に対して

$$l(m\, m_0(D) D) - l((m-p) m_0(D) D) \leq \gamma m^{\kappa - 1},$$

但し γ は m によらない常数．

これは定理 1 の右辺の評価の精密化である．

$m_0(D)$ の存在は少々気持悪いが仕方がない．しかし次の定理が成立する．

定理 3．i) $\kappa(D, M) = n$ とする．すると $m_0(D) = 1$．

又 ii) 一般には Dに対し次の性質をもつ因子 D_0 が唯一つ存在する. 1) $m_0(D)=m_0(D_0)$, 2) $m_0(D-D_0)=1$, 3) $\kappa(D_0, M)=0$, 4) $\kappa(D-D_0, M)=\kappa(D, M)$, 5) 1)〜4)をみたす D_0 のうちで成分の数最小.

Remark. $N(D)=\phi$ のとき, $\kappa(D, M)=-\infty$ とおき, 一般に M の D次元を定義しておく. この定義は後に甚だ便利となる.

定理4. $\kappa(D, M)=k>0$ のとき, 次の性質をもつ compact 複素多様体の fiber 空間 $\psi: M^* \to W$ が双有理型同値を除いて唯1つ存在する:

i) M^* は M と双有理型同値,

ii) W は, 射影的代数多様体の構造を許す,

iii) ψ の一般の fiber $M^*_w=\psi^{-1}(w)$ は連結. M^* と M の双有理型対応による M上の D の像を D^*, それの M^*_w 上への制限を D^*_w とおく. すると, $\kappa(D^*_w, M^*_w)=0$.

定理5. compact 複素多様体の fiber 空間 $f: \tilde{M} \to M$ を考える. すると,

i) M上の因子 D に対しては, $\kappa(D, M)=\kappa(f^*D, \tilde{M})$,

ii) $\tilde{M}$ 上の因子 $\tilde{D}$ に対しては, $f^{-1}(w)$ なる general fiber の既約成分を $\tilde{M}_w$ で表わすとき, $\kappa(\tilde{D}, \tilde{M}) \leq \kappa(\tilde{D}_w, \tilde{M}_w)+\dim M$.

以上の定理は, 基本的には G.A.G.A. により代数多様体に

ひきもどして証明される. その意で全く代数幾何的なのである.

さて, $D=M$の標準因子 (canonical divisor) のとき, $\kappa(D, M)$ を $\kappa(M)$ で表わし Mの標準次元 (canonical dimension of M ; 或は, Mのコダイラ次元又はクニヒコ次元などとよぶのはいかがなものだろうか.) とよぶことにしよう. この場合に上の定理を書くと次のようになる.

κ-0. $\kappa(M)$ は Mの双有理型不変量で, $\kappa(M)=-\infty, 0, 1, \ldots, n$ なる $n+2$ 個の値をとる.

κ-1. $\tilde{M} \to M$ を Mの有限不分岐被覆とする. すると, $\kappa(\tilde{M}) = \kappa(M)$.

κ-2. $\varphi: \tilde{M} \to M$ を compact 複素多様体の fiber 空間, $\tilde{M}_\omega$ を φ の一般の fiber $\varphi^{-1}(\omega)$ の連結成分とする. そのとき, $\kappa(\tilde{M}) \leq \kappa(\tilde{M}_\omega) + \dim M$.

κ-3. $\kappa = \kappa(M) > 0$ とする. すると 次の性質をもつ fiber 空間 $\varphi: M^* \to W$ が双有理型同値を除いて一意に存在する:

i) M^* は M と双有理同値

ii) W は射影的代数多様体の構造を許し κ次元.

iii) φ の一般の fiber $\varphi^{-1}(\omega) = M^*_\omega$ は連結

iv) $\kappa(M^*_\omega) = 0$.

Remark. $\kappa(M) = 0$ なる M を分類するのは甚だ興味のあ

る極めて難しい問題である．

§3. M^nの代数的次元．

M^nの有理型函数全体は$\mathbf{C}$上の代数函数体$\mathbf{C}(M)$をつくる．そこで代数的次元 $a(M) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}(M)$ を定義する．すると，

a－0. $a(M)$ は M の双有理型不変量で，$a(M) = 0, 1, \cdots, n$ なる $n+1$ 個の値をとりうる．

a－1. M_1 を M^n の subvariety (irreducible reduced analytic subset of M) とする．すると $a(M_1) \geqq a(M) - (n - \dim M_1)$．(上野[☆])

a－2. $\tilde{M} \to M$ を compact 複素多様体の fibre 空間とする．すると，$a(M) \leqq a(\tilde{M}) \leqq a(M) + \dim \tilde{M} - \dim M$．(上野[☆])

a－3. $a = a(M) > 0$ とする．そのとき次の性質をもつ fibre 空間 $f: M^* \to W$ が双有理型同値を除いて唯一つ存在する：

i) M^* は M と双有理型同値，

ii) W は a 次元で射影的代数多様体の構造を許す，

iii) f により惹き起こされた $\mathbf{C}(W) \to \mathbf{C}(M^*) = \mathbf{C}(M)$ は同型対応を与える．

（1意性は上記の i～iii で出てしまうが），

iv) f の一般の fiber $f^{-1}(w) = M^*_w$ は連結 (河井)，

v) M 上の因子 D に対し 常に $\kappa(D^*_w, M^*_w) \leqq 0$，とくに $\kappa(M^*_w) \leqq 0$ (上野)．

☆ 上野健爾 (東京大学)．

Remark. a)についての定理は，κのよりやさしいがそれだけ強力なものはでてこない．面白いのは，κのでてくるv)なのである．

a−3中の fibre空間の構成（小平）[9]を説明しておく；

$\mathbf{C}(M)$ は代数函数体だから広中の定理[4]により非正則射影代数多様体Wをとって $\mathbf{C}(M)=\mathbf{C}(W)$ にできる．$W\subset \mathbf{P}^N$ であるから，そのうめこみを $W\ni p\longmapsto x_0(p):\cdots:x_N(p)\in \mathbf{P}^N$ で表わすと，$x_1/x_0,\dots,x_N/x_0\in \mathbf{C}(W)$ が定まる．$\mathbf{C}(W)=\mathbf{C}(M)$ により，x_i/x_0 を M 上の有理型函数とみて φ_i とおく．有理型写像 $M\ni p\longmapsto 1:\varphi_1(p):\cdots:\varphi_N(p)\in \mathbf{P}^N$ の不確定点を除去して，正則写像 $\varphi: M^*\longrightarrow W$ をえる．これがもとめるものである．

v)の性質は，広中によって注意されたように，relative projective imbedding を用いることにより容易に示される[5]．

Remark. $a(M)=n-1$，のときは $\dim M_w^*=1$ で，$D=\pm K$ を用いると，$\kappa(M_w^*)=0$ 即ち M_w^* は楕円曲線となることが直ちにわかる．又 $M^*=M$ ととれる．

§4. Albanese 写像.

$a(M)=0$ なる M の分類を行おう．しかしこのとき $\kappa(M)\leqq 0$ で，§§2, 3 の分解が用いれない場合となっている．又，$n=2$ でもわからない現状だから，M^n : Kähler として考察する

ことにしよう. $q = q(M) = \frac{1}{2}b_1(M) = h^{0,1}(M) = h^{1,0}(M)$ を用いて M の分類を考える.

q–0. $q(M)$ は M の双有理型不変量で, $q(M) = 0, 2, \cdots, n$ なる n 個の値をとる.

q–1. $\tilde{M}$ を M の有限(分岐)被覆多様体とする. a–2 により $a(\tilde{M}) = 0$ になる, 又 $q(\tilde{M}) \geq q(M)$.

q–2. 次の性質をもつ fiber 空間 $\Phi : M \to T^q$ が存在する. (証明は [8] II と同じ).

i) T^q は q 次元の complex torus, 又正の因子をもたない.

ii) Φ の一般の fiber $\Phi^{-1}(t) = M_t$ は連結, 従って compact 複素多様体.

Φ は M の Albanese 写像であって次のように定義される:

$H^0(M, \Omega^1) \ni \omega_1, \ldots, \omega_q$, $H_1(M, \mathbf{Z}) \ni \gamma_1, \ldots, \gamma_{2q}$.

$\mathbf{C}^q$ を $(\int_{\gamma_1}\omega_1, \ldots, \int_{\gamma_1}\omega_q), \ldots, (\int_{\gamma_{2q}}\omega_1, \ldots, \int_{\gamma_{2q}}\omega_q)$ が底である lattice でわって T^q とおくと, $0 \in M$ を定めて

$$M \ni p \longmapsto \left(\int_0^p \omega_1, \ldots, \int_0^p \omega_q\right) \in T^q,$$

により Albanese 写像 Φ が定義される.

κ, a, q とくるに従い証明は楽にしかし結論は弱くなってくる.

定理 (川井). $q(M) = n-1$ のとき $\kappa(M_t) \leq 0$. 即ち M_t は楕円曲線か射影直線.

我々は $q(M)=n-2$ の時の部分的解答として，

定理 ☆ $q(M)=n-2$ のとき，$\kappa(M_t)\neq 1$.

を得た．楽天的にたてると，

予想；一般に $\kappa(M_t)\leq 0$.

但しこれの根拠は殆んど何もない．K のときには $\kappa(\ )=0$ a のときは $\kappa(\ )\leq 0$. だから q のときは $\kappa(\ )\neq 1$ あたりが身分相応という所だが，予想がいえればまさに大定理であろう．それにつけても κ の理論はこう考えてみると仲々優秀なことが御理解いただけよう。

§5 定理 ☆ の証明.

M_t を一般型の楕円曲面（即ち $\kappa(M_t)=1$）と仮定して矛盾を導く．曲面の変形の理論によれば，κ は変形不変．よって，ある一般の $t_0\in T$ で M_{t_0} の標準次元が 1 でありさえすれば，Φ の函数行列 J_Φ の位の下らない点では常に M_t の標準次元は 1 なのである．

第1段階．$\mathcal{L}=\mathcal{O}(\alpha K_M)$, ($\alpha\geq 86$.) とおいて，Grothendieck 理論に従って，有理型写像 $h: M\longrightarrow \mathbb{P}(\Phi_*(\mathcal{L}))/T$ を構成する．N を M の h による像とする．$T'=\{t'\in T;\ \mathrm{rk}J_\Phi(x)=n-2,\ \Phi(x)=t'\}$ とおく．$T-T'$ は T の解析的集合である．T には余次元 1 の部分解析的多様体が存在しないから，$T-T'$ の余次元 ≥ 2. なることがわかる．$M'=\Phi^{-1}(T')$ とおく．する

と $\Phi' = \Phi|M' : M' \longrightarrow T'$ は，滑らか（smooth）である．そして $t' \in T'$ に対しいつも $M_{t'}$ は一般型の楕円曲面なのであった．一般型の楕円曲面の変形の理論（[6] II §3）によると，$h' = h|M' : M' \longrightarrow N' = N|T'$ は，各点 $t' \in M'$ に於て，M'_t の elliptic fiber space の fibering を与えるものである．

才2段階．$a(N) \geqq 1$ を示す為に河井の理論を用いる．

定理（河井）．fiber space：$\Phi : N \longrightarrow T$ が $\dim N = \dim T + 1$，T は $a(T) = 0$ なる complex torus とする．Φ の general fiber C_t が既約のとき，その genus $\pi = \pi(C_t) \geqq 2$ であれば $a(N) \geqq 1$．$\pi = 1$ でも Φ が section をもつなら（$\pi = 0$ なら3個以上の section をもつなら）$a(N) \geqq 1$．

これによれば，M_t の底曲線の種数 π は，1又は0となることがわかる．次には section のないことをいえばよい．

才3段階．次の Lemma を証明する．

Lemma．一般型の楕円曲面 S は，$\pi(S) = 1$ なら少くとも1つの，$\pi(S) = 0$ なら少くとも3つの singular fiber を持つ．

（証明）$\psi : S \to \Delta$ を S の elliptic fiber space としよう．$\pi = \pi(\Delta) =$ ($\pi(S)$ の def.)，ψ の multiple fiber の重複度を $m_1, \dots, m_s$ とすると，$\kappa(S) = 1$ によって，

$$2\pi - 2 + 1 - q + p_g + \sum_{\nu=1}^{s}\left(1 - \frac{1}{m_\nu}\right) > 0. \qquad (1)$$

$\pi = 1$ で singular fiber がないとする。すると $s=0$, 又、singular fiber の型 I_b^*, II, … をもつ singular fiber の数を $\nu(I_b^*)$, $\nu(\mathrm{II})$, … で示し、j として functional invariant の order を示すとき、

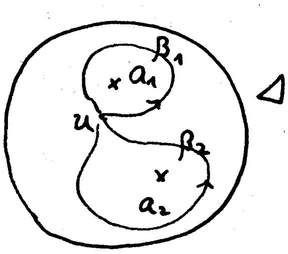
$$12(1-q+p_g) = j + \sum_{b \geqq 1} 6\nu(I_b^*) + 2\nu(\mathrm{II}) + 10\nu(\mathrm{II}^*) + 3\nu(\mathrm{III}) + 9\nu(\mathrm{III}^*) + 4\nu(\mathrm{IV}) + 8\nu(\mathrm{IV}^*) \qquad (2)$$

が成立つのであった。(2)によれば $1-q+p_g = 0$. これは(1)の不等式と矛盾する。次に、

$\pi = 0$ で、singular fiber が高々2本として矛盾を導く。Case I) $s=0$. このとき (1)によれば $1-q+p_g > 2$. よって(2)に docking すると、

$$j + \sum 6\nu(I_b^*) + \cdots \geqq 36. \qquad (3)$$

そこで $j=0$ の時を考える。明らかに singular fiber が2本しかないと(3)は成立たない。$j>0$ の時を考えよう。



又 singular fiber は2本: $\psi^*(a_1)$, $\psi^*(a_2)$ があるとしよう。左の図の道 β_1, β_2 にそって $E_u = \psi^{-1}(u)$ の 1-cycle を動かし $H_1(E_u, \mathbb{Z})$ の変換 B_1, B_2 をえる。

すると $B_1 B_2 = 1$. $j > 0$ によって I_b 又は I_b^* の singular fiber が存在するのだから B_1 は $SL_2(\mathbb{Z})$ 内で $\pm\begin{pmatrix}1 & b_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ と共役としてよい。ここに $b_1 > 0$. す

ると B_2 も無限位数になる。それ故 B_2 も $\pm\begin{pmatrix}1&b_2\\0&1\end{pmatrix}=B_2^*$ $(b_2>0)$ と $SL_2(\mathbb{Z})$ 内で共役。$B_1B_2=1$ なのだから、$B_1=\pm\begin{pmatrix}1&b_1\\0&1\end{pmatrix}$ として、或る $A\in SL_2(\mathbb{Z})$ が $AB_2^*=B_1^{-1}A$ をみたすことになる。$A=\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}$ として、$AB_2^*=B_1A$ と具体的に書き表わす。それから $b_1, b_2>0$ に矛盾することがでてくる。又 singular fibre が1本なら、直ちに矛盾。Case II. $\Delta>0$. この時も同様にして矛盾を導くことができる。

第4段階。有理型写像 $h: M\longrightarrow N$ の不確定点を広中の定理を用いて除去する。即ち双有理型の正則写像 $M_1\to M$ があって h と合成すると、$h_1: M_1\to N$ は正則写像。そこで、$A_1=\{h_1$ の函数行列が maximal rank でない点$\}$ とおくと、A_1 は M_1 の解析的集合。Remmert の定理によると、$B=h_1(A_1)$ も解析的集合。さて、$t'\in T'$ に対しては、$B|t'\subset N|t'$ に応ずる elliptic fibre space $M_{t'}\longrightarrow N|t'$ の fibre が singular であり逆も成立つ。それ故、fiber space $N\longrightarrow T$ は次の性質をもつ。i) $\pi(N_t)\geq 2$ or ii) $\pi(N_t)=1$, $N\supset B$ があって $B|t\neq 0$ for all $t\in T$. or iii) $\pi(N_t)=0$, $N\supset B$ があって、$B|t$ は $t\in T'$ について有限集合でその数 ≥ 3, 残りの点では $B|t$ は1次元の解析的集合。（ここに B は余次元1の解析的集合）。i) は、第2段階における河井の定理によると $a(N)\geq 1$, 又, ii) の時も

も[ ]の手法によって結局 section の存在がわかり $a(N) \geq 1$ となって矛盾に到る. もっとも次の場合の議論と大体同じでもある. さて iii) の時を考える. B の既約成分で T の上へ写像されるものをとり B_1 とする. ファイバー空間 $B_1 \hookrightarrow N \to T$ を考える. $B_1 - B' \to T'$ は不分岐だから, $\pi_1(T') \xrightarrow{\sim} \pi_1(T)$ (これは, $T-T'$ の実余次元 ≥ 4 による) に注意すると, T の不分岐被覆 T^* が存在し, open immersion $B_1 - B' \to T^*$ があって,

$$
\begin{array}{ccc}
B_1 - B' & \longrightarrow & T^* \\
\downarrow & & \downarrow \\
T' & \longrightarrow & T
\end{array}
$$

が可換図形となる. $\Phi : M \to T$ の底を拡大する: $M^* = M \times_T T^* \longrightarrow T^*$. $a(M^*) = a(M) = 0$ だから, 同じ様に M^*_t の底曲線の族の compact化 N^* をつくると, その singular fibre の底点のつくる解析的集合 B^* は, $\# B^*_t \geq 3$, かつ $B^*_1 = B_1$ であって これは, T'^* 上で section となる. B^* にはまだ既約成分があるから, その一つを B_2^* として同様の考察を繰返す: $N^{***'}$ は $T^{***'}$ 上に 3 本の section をもつ $\mathbb{P}^1$-bundle である. よって $N^{***'} = \mathbb{P}^1 \times T^{***'}$. かくて, $\mathbb{C}(N^{***'}) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^1) \times \mathbb{C}(T^{***'}) = \mathbb{C}(t)$. 又 $N^{***'} \to N'$ は finite だから, $\mathbb{C}(N^{***'}) / \mathbb{C}(N')$ は代数的拡大. $\mathbb{C}(N') = \mathbb{C}(N)$ は, $N - N'$ の余次元 ≥ 2 より明らか. 以上によって $a(N) = 1$ が示されて矛盾に到る.

§6. 楕円曲面の基本群と多種数.

Sを楕円曲面，その1つの elliptic fibre space を $\Phi: S\to\Delta$ で示す. Sの基本群をGで示す. Gの群論的構造を考察するために $C = G$の中心, $H = G/C$, $K = [G, G]$ (Gの commutator群), $A = G/K$ なる記法を用いる. 又通常のように$\{m_1, \dots, m_s\}$をもって $\Phi: S\to\Delta$ の重複 fibre の重複度を示すことにしよう. 又 $\pi = \pi(\Delta)$ である.

Gの構造はまず4種にわかれて，各種ではそれぞれ次のように定められる. 但しSは極小モデル* である.

甲) G：可換群.

G	b_1	π	s	p_g	S の構造
0	0	0	≤ 1	0	有理的或は一般型
0	0	0	≤ 2	1	K3 或は一般型
$\mathbb{Z}_2$	0	0	2	0	Enriques 或は一般型
$\mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_{d'}$	0	0	≤ 2		一般型
$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{d''}$	1	0	≤ 3	0	Hopf 曲面
$\mathbb{Z}^2$	2	0	≤ 3	0	線織面
$\mathbb{Z}^4$	4	1	0	1	複素円環体

($\mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_{d'}$ は $d'=1$ なら $d \geq 3$, 又 $d' \geq 2$ なら $d \geq 2$, ともに有限の数とする; $d'' \geq 1$)

---

* モデルを変えても基本群, P_m ともにかわらない.

西) Gは可換でない，Hは有限群．

H	G	C	$\{m_1, \dots, m_s\}$	Sの構造
有限	D_{2m}	$\mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_2$	$\{2, 2, 2m\}$	一般型
	D_{2m}	$\mathbb{Z}_{d'}$	$\{2, 2, m\}$	
	D_{2m}	$\mathbb{Z}_2$	$\{2, 2, 2m\}$ or $\{2, 2, m\}$	(このとき $G \cong D_{4m}$)
	A_4	$\mathbb{Z}_{d''}$	$\{2, 3, 3\}$	
	S_4	$\mathbb{Z}_{d''}$	$\{2, 3, 4\}$	
	A_5	$\mathbb{Z}_{d''}$	$\{2, 3, 5\}$	
無限	D_{2m}	$\mathbb{Z}$	$\{2, 2, 2m\}$	Hopf 曲面
	D_{2m}	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	or $\{2, 2, m\}$	
	A_4	$\mathbb{Z}$	$\{2, 3, 3\}$	
	S_4	$\mathbb{Z}$	$\{2, 3, 4\}$	
	A_5	$\mathbb{Z}$	$\{2, 3, 5\}$	

(ここに於て群の記号，D_{2m} は位数 $2m$ の2面体群，A_4 は正4面体群，S_4 は正6面体群，A_5 は正12面体群をそれぞれ示す，又，$d = 2, 3, 4, \dots$，$d' = 1, 3, 4, \dots$，$d'' = 1, 2, 3 \dots$ を示す．)

南) Gは可解でも有限でもない, Kは可換.

H	A	K	$\{m_1,\dots,m_s\}$	Sの構造	
$\mathbf{Z}^2$	$\mathbf{Z}^2$	0	$s=0$	(1)の型, $b_1=3$,	
	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_d$	$s=0$	一般型, $\pi=1$,	
	$\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}^2$	$\{2,2,2,2\}$	(2)の型	又は一般型 かつ $\pi=0$
	$\mathbf{Z}_3\oplus\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}^2$	$\{3,3,3\}$	(3)の型	
	$\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_4$	$\mathbf{Z}^2$	$\{2,4,4\}$	(4)の型	
	$\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}^2$	$\{2,3,6\}$	(6)の型	

(ここに (i)の型とは $iK\sim 0$, かつ $jK\not\sim 0$ ($j\leq i-1$) なる曲面を示す).

北). 以上以外.

Gは, $N=\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbf{Z}_d$ ($d\geqq 1$), F = 放物元のない fuchs群 とするとき N の F による拡大と唯1通りに表される. 又抽象群の構造からFの極大有限群の位数 $m'_1,\dots,m'_s$ が定まる*. よって $\pi=F/(F,F)$ の位数 $\{m_1,\dots,m_s\}=\{m'_1,\dots,m'_s\}$ になる.

以上の表をためすすがめつ眺めることにより次の結論をうる.

甲) Sの底曲線の種数は, Sが hyperelliptic (南類に入る)

*) Reidemeisterの定理.

でない限り，homotopy 不変である．

乙）(i) の型 は homotopy 不変である．もう少し詳しくいうと，S を (i) の型とする．S_1 を曲面で，S と同じ homotopy 型をもつとする．そのとき S_1 も (i) の型 になる．

丙）．S を $G \neq \mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_{d'}$ $(1 \leq d, d')$，$\neq D_{4k}$ なる楕円曲面とする．すると $P_m(S)$ $(m \geq 1)$ は，楕円曲面の範囲内で homotopy 不変である．

丁）$c_1^2(S) = c_2(S)$，$b_1(S) > 1$ なる楕円曲面 S の $P_m(S)$ は homotopy 不変である．とくに小平の分類 VI_0 の曲面の P_m はすべて homotopy 不変である．

戊）G：有限，$\neq \mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_{d'}$, D_{4k} なら $P_m(S)$ は homotopy 不変量．

Remark．甲）は変形不変という弱い形で　　に於て示されている．このように基本群の研究によれば，[ ] とは独立だから，甲）をまず引用すると [ ] の証明が少し楽になる．乙）も ( ) に変形不変という弱い形で示されている．しかしその議は直ちに高次元に拡張できるものである．

G の構造表の証明の概要．

I）まず，$\Phi : S \to \Delta$ の重複 fibre $\Phi_1^*(a_1) = m_1 \Phi_1^{-1}(a_1), \cdots,$ $\Phi^*(a_s) = m_s \Phi^{-1}(a_s)$ を考えて，それを除去したい．即ち，Δ に，$a_1, \cdots, a_s$ に於て，$m_1, \cdots, m_s$ 位の分岐指数をもつ普遍被覆

様体 $\tilde{\Delta}$ を構成したいのだができない時がある。まずこの時から片付けてしまおう。

II) $\pi=0$, $s\le 2$ とする。$P_m=-2m+m(1-q+p_g)+[m(1-1/m_1)]+[m(1-1/m_2)]$, であるから, $1-q+p_g=0$ ならば $\kappa=-\infty$ となり ruled か Hopf. 次に $\kappa=0$, 1 と順次調べるとよい。

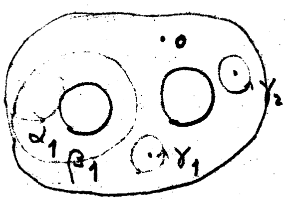
III). そうでないとする。$\tilde{S}=S\times_{\Delta}\tilde{\Delta}\to\tilde{\Delta}$ は $\tilde{\Delta}$ 上の elliptic fibre space. $\tilde{\Delta}/\Delta$ の基本群を $\pi_1^*(\tilde{\Delta}/\Delta)$ で示すと,

$$\{1\}\to\pi_1(\tilde{S})\to\pi_1(S)\to\pi_1^*(\tilde{\Delta}/\Delta)\to\{1\},\ (\text{exact})$$

ができる。さてもっとよく $\pi_1(S)$ の generator を調べよう。

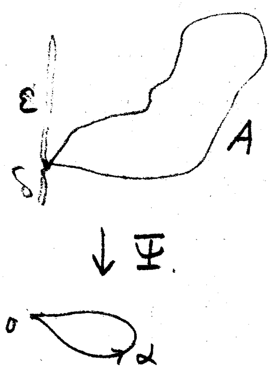
IV) $S\to\Delta$ に I_b 以外の型の singular fibre があったとする。するとそれは単連結. よってこのとき $\pi_1(\tilde{S})=\{1\}$. それで $\pi_1(S)\cong\pi_1^*(\tilde{\Delta}/\Delta)$. I_b の型しかないとする。

V) まず, $\pi_1(\Delta-\{a_1,\dots,a_s\})$ の generator を通常のように $\alpha_1,\dots,\beta_g,\gamma_1,\dots,\gamma_s$: $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\cdots\gamma_s=1$ で与えよう。



$o\in\Delta-\{a_1,\dots,a_s\}$ を定めておく。$\Phi^*(o)=E$ としよう。さて α,β,γ の S 上への lift を A, B, Γ で示そう。すると, covering homotopy theorem によって relation $A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}\cdots\Gamma_s=\varepsilon^c\delta^d$, ε,δ は $\pi_1(E)$

の generator, $c, d \in \mathbb{Z}$ である. 又 $A_1 \delta A_1^{-1}$, も $\Delta - \{a_1, \cdots\}$ 上では trivial. よって, $\{\varepsilon, \delta\}$ は $\{A_1, \cdots, \Gamma_s, \varepsilon, \delta\}$ の中で正規となっている. このようにして $S' = \Phi^{-1}(\Delta - \{a_1, \cdots, a_s\})$ の基本群がきまる. まとめておくと, $\pi_1(S')$ の generator は $\{A, B, \Gamma, \varepsilon, \delta\}$ で relation は 1) $\{\varepsilon, \delta\}$ は可換群 (i.e., $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon$, の上に $R(\varepsilon, \delta) = 1$ という relation もありうる) 2) $\{\varepsilon, \delta\}$



は正規部分群, 3) $A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots \Gamma_s \in \{\varepsilon, \delta\}$. 念のため証明しよう. E 内に一点 1 をとる. $\pi_1(S', 1)$ として考える. $\pi_1(S', 1) \ni L$ をとり $\Phi(L)$ とおとすと, $\Phi(L) = \alpha, \gamma_i$ でかかれる. それ故 $L = A, \ldots, \Gamma_s \cdot \varepsilon^{c'} \delta^{d'}$ とかかれる. 次に relation をきめる. $R(A, B, \Gamma, \varepsilon, \delta) = 1$ とせよ. 2) によって $R = R_1(A B \Gamma) \cdot R_2(\varepsilon, \delta)$ と分離できる. さて $R_1(\alpha \beta \gamma) = 1$ だから, $R_1(A, B, \Gamma)$ も簡約化しつづければ, $R_1(A, B, \Gamma) = R_3(\varepsilon, \delta)$ とかかれる. $R = R_3(\varepsilon, \delta) \cdot R_2(\varepsilon, \delta) = 1$. これで 1) になった. VI) 次には, V. Kampen の定理を用いて, $\pi_1(S)$ の generator と relation をきめねばならない. $A, B, \Gamma, \varepsilon, \delta \in \pi_1(S)$ とみなすとやはりこれらで生成され, relation は 1) 2) 3) に加うるに, 4) $\Gamma_i^{m_i} \in$

$\{\varepsilon, \delta\}$, 5) $\varepsilon T_i = T_i \varepsilon$, $\delta T_i = T_i \delta$ $i=1,2,\cdots,s$. 更に注意. VII) I_b; $b>0$ の singular fibre E^* を持つとき, $\varepsilon=\delta$ である. それは, $\pi_1(E^*) \cong \mathbb{Z}$ だから. VIII). $\pi=0$ とする. relation 5) によると, $\{\varepsilon, \delta\} \subset \mathrm{Cent}\,\pi_1(S)$. 又 IX) $\pi_1(\mathfrak{F}) = \{\varepsilon, \delta\}$ とみなせる. さて, $\pi_1(\mathfrak{F}) = \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_d, 0$ である. さて III) のつづきを考えることにしよう III) $\pi=0$ とする. $\pi_1{}^*(\Delta/\Delta)$ の群構造を調べると, $\pi_1{}^*(\Delta/\Delta) \cong D_{4k}$ 以外は $\mathrm{Cent}^* = 0$. それだから, $\mathrm{Cent}=0$ のときは, $\pi_1(\mathfrak{F}) = \mathrm{Cent}\,\pi_1(S)$. $\pi_1{}^*(\Delta/\Delta) \cong D_{4k}$ のときは $\mathrm{Cent}\,\pi_1{}^*(\Delta/\Delta) = \mathbb{Z}_2$ であってよくみると, 両の差がわかる. 他の場合も少しまじめにみていけばよいのである.

所で逆に $P_m(S)$ を与えるとき $\pi_1(S)$ はどの位定まるのだろうか. 或は, S の構造がどの位定まるか, といってもよい. イタリアの代数曲面論は, P_m, q の special value によって特殊な曲面の特徴づけという成果をもたらした. $\kappa = -\infty, 0$ なら完全にわかるし, 実質上古典である (non alg. なら無論小平). $\kappa=2$ ならやはり小平の公式から P_m を与えることは c_1^2, c_2 を与えることと同値になる. それ故残ったのは $\kappa=1$ の場合である. このとき

$$P_m(S) = m(2\pi-2+1-q+p_g) + \sum [m(1-1/m_j)] + 1-\pi,$$

* Cent は群の中心を表す.

であったが，まず，canonical degree：

$$\lambda(S)=\lim_{m\to\infty}P_m(S)/m = 2\pi-2+1-q+p_g+\sum_{j=1}^{s}(1-1/m_j)$$

が定まり，$P_1=p_g$，

$$1-\pi=\overline{\lim}\,(P_m(S)-\lambda m)$$.

として p_g, π が定まってしまう．$q=\pi$ or $\pi+1$ はやはり与えられているとしてよいだろう．すると，

$$f(m)=\sum_j\left[m\left(1-\frac{1}{m_j}\right)\right],$$

から $m_1,\dots,m_s$ が定まるか？ということになる．これは容易にわかる：$f(2)=s$ として数がきまる．$s_1=\#\{i;\, m_i=2\}$, $s_1'=\#\{j;\, m_j\geq 3\}$ とおくと $f(3)=s_1+2s_1'$, $s_1+s_1'=s$ これより s_1 が定まる．同様にして $m_1, m_2, \dots, m_s$ の決定が可能である．

かくして，P_m は $\{m_1,\dots,m_s\}$, π, を通して $\pi_1(S)$ の構造と結びつくのである．P_m は双有理不変量としてまず導入されたから全く代数幾何的，複素解析的量である．それがこのように $\pi_1(S)$ と密接に $\{P_m(S)\}_{m=1,2,\dots}\rightleftharpoons\pi_1(S)$ という形で結びついているのは思いもかけぬ連関であり驚異である．これこそ Euler の公式 $e^{\pi i}=-1$, or $e^{\theta i}=\cos\theta+i\sin\theta$ の如き興趣あるものではあるまいか．そして更に P_m は追求さるべきである．目的は遠くかすかにある．それは高次元複素多様体の完全なる分類理論である．

文 献 表

[1] F. Enriques, Superficie Algebriche, Bolognia, (1948).

[2] A. Grothendieck, Eléments de Géométrie Algébrique, Publ. Math. de I. H. E. S. NO. 4, 8, 11, 17, 20, 28, 28, 32, · · · .

[3] ______________, "Téchnique de construction en géométrie analytique," Séminaire H. Cartan, 13^{e} anneé: 1960/61.

[4] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety of characteristic zero, I,II, Ann. Math. 79 (1964), 109 - 326.

[5] ______________, "Review of S. Kawai's paper," Math. Review, 466, vol. 32, No. 11 (1966), 87 - 88.

[6] S. Iitaka, "Deformations of compact complex surfaces I, II and III," in Global Analysis: papers in honor of K. Kodaira, (1969) 267 - 272, J. Math. Soc. Japan, 22 (1970), 247 - 261 and ibid. (forthcoming).

[7] ________, "On D-dimensions of algebraic varieties," Proc. Japan Acad., 46 (1970) and to appear in J. Math. Soc. Japan.

[8] S. Kawai, "On compact complex analytic surfaces II," J. Math. Soc. 21, (1969), 604 = 626.

[9] K. Kodaira, "On compact complex analytic surfaces I, II and III," Ann. of Math. 71, (1960), 111 - 152, ibid. 77, (1963) 563 - 626, ibid. 78, (1963) 1 - 40.

[10] ________, "On the structure of compact complex analytic surfaces I, II, III and IV." Amer. J. Math., 86, (1964) 751 - 798, ibid. 88, (1966) 682 - 721, ibid. 90, (1968) 55 - 83

ibid. 90, (1968) 1048 - 1066.

[11] K. Kodaira, "Pluri-canonical systems of algebraic surfaces od general type," J. Math. Soc. Japan, 20 (1968) 170 - 192.

[12] O. Zariski, Algebraic Surfaces, Ergebnisse der Mathematik, vol. 5. Springer 1935.

[13] ________ , "The theorem of Riemann Roch for high multiles of an effectve divisor on an algebraic surface," Ann. Math. 76,(1962) 560 - 615.